# 谈谈计算机怎样解几何题

430079 武汉华中师范大学教育信息技术工程研究中心 张景中 彭翕成

近几年, 我们在向中学老师介绍信息技术的时候, 不少老师对计算机自动解几何题表示出强烈的兴趣, 想了解得更多一些. 关于这个问题, 笔者曾写过一本科普读物(文[1]), 但考虑到该书已经脱销, 读者难以买到; 再加上近几年智能教育软件又有了新进展, 所以很有必要再来谈谈这个问题.

认真起来, 所谓计算机解几何题这个说法, 其实是有问题的. 人是万物之灵, 计算机是人造出来的, 它并不会解题. 是人设计了一套一套用计算机解题的办法. 计算机只不过是工具, 所以应当是人怎样用计算机解几何题. 至于自动推理, 其实也并不能自动, 也是人出了主意推动计算机进行推理. 就像自行车不会自己跑路, 自来水不会自己到来一样. 不过大家仍然说自行车、自来水, 这样通俗生动. 反正心里明白, 自行车要人蹬, 自来水是水塔水泵压过来的.

**1. 计算机的基本功能**

我们若想运用计算机解题, 首先就必须了解计算机的一些基本功能. 计算机可供解题使用的基本功能大体上有4类: 变量赋值, 基本运算, 条件选择, 循环操作.

第一, 要记得住东西. 如果记不住题目, 或者是记不住解题的有关知识和方法, 还解什么题呢? 光记住还不够, 还要能表达出来. 解了题闷在肚里表达不出来, 不是白白辛苦一场了吗? 能记住我们要它记住的信息, 又能表达出来, 这种功能主要通过变量赋值来实现.

第二, 要会做基本的运算. 计算机作计算肯定是不成问题的, 否则怎么叫计算机呢? 不过我们这里所讲的计算, 除了包含一般所说的数值计算, 还包括符号计算功能. 因为数值运算通常容易出现误差, 多步推导之后, 误差被积累, 可能导致结果谬以千里.

第三, 求解问题时, 常常要根据不同的情形使用不同的公式和方法. 简单到如计算一封信的邮费, 还分平信、挂号、本地、外地以及是否超重. 几何问题的条件更是千差万别. 计算机可以根据条件安排, 自动区别不同的情形, 执行不同的运算, 这叫做条件选择的功能.

第四, 计算机的另一长处就是不怕枯燥麻烦. 一个运算或一套操作, 让它重复多少次它也不会罢工或埋怨. 几何问题有时要多次检验, 有时要反复探索, 有时又要作大量演算. 只要你一声令下, 它就老老实实干起来, 直到完成预定次数或达到某个目标. 这叫做循环操作功能.

那么, 又如何调用计算机的这些基本功能来解题呢? 鸟有鸟言, 兽有兽语. 计算机也有它与人交流的语言, 就是程序设计语言. 程序设计语言种类很多, 各有特色. 常用的如广泛流行的BASIC语言, 适于专业软件开发的C语言, 利于网上交流的JAVA语言, 长于人工智能程序的LISP语言等等. 语言千变万化, 但万变不离其宗, 核心语句就是4类: 赋值语句、基本运算语句、条件语句和循环语句, 作用无非是用来指挥计算机执行4类基本功能. 要想充分利用好计算机, 首先得懂它的语言. 而不管是什么程序设计语言, 熟练运用就好. 这里就不多说了.

**2. 几何解题花样多**

几何题有计算题、证明题, 还有作图题. 他们各有特点, 又是相通的. 两千年来, 人们积累了丰富的解几何题的经验、技巧和方法. 这些有待教给计算机的解题本领, 大体可以分为4类: 检验、搜索、归约和转换.

计算和作图都要有个道理. 讲清楚道理就是证明. 古希腊人研究几何最讲究证明. 中国古代的几何学则讲究计算, 把画图和推理都归结为计算, 叫做寓理于算. 计算、作图和证明, 问题的形式不同, 却也有相同之处. 三类问题的前提, 都可以用几何图形来表示. 证明题可以转化为计

算. 要证明两条线段相等, 只要算出两者的比为1或差为0就行了. 要说明计算是准确的, 作图过程是合理的, 归根结底要证明. 三类问题在解决过程中都要推演论证, 推演论证所用的规则又是一致的. 这就是三者的相通之处.

要问计算机如何解几何题, 就得先看人如何解几何题. 当然, 人和人不同, 应该说要看几何学家如何解几何题. 几何学家拿到一个几何题, 有哪些高招呢?

第一, 要画画看看, 量量算算, 看题目出得对不对, 合理不合理. 不合理就不做下去了. 这叫做检验.

第二, 根据条件, 参照问题, 试着东推推, 西试试, 推出来的东西有用没用先记下来. 这样或许就解决了问题. 解决不了, 再想别的出路. 说不定记下来的材料还有用. 这叫搜索.

第三, 搜索不出来, 还可以抓住问题的目标(待证的结论、待求的几何量、或待作的点与线), 分析计算, 化简条件, 消去中间的参数或几何元素, 力求水落石出. 这叫归约.

第四, 当上述常规方法不能奏效时, 人的智慧和灵感就成为取胜的源泉了. 或用反证法、同一法, 或加辅助线, 或对部分图形作平移旋转, 总之是改变问题的形式, 以求化繁为简. 这叫转换.

计算机是人的学生. 它的本领是人教的. 它是笨学生, 不教不会. 但它又是好学生, 会牢牢记住你教给它的方法, 一丝不苟地按你写好的程序去做. 如果你循循善诱, 它又能青出于蓝. 计算机解题靠人教. 人会解一道题, 把方法教给计算机, 计算机就会解这道题. 这道题中的数字换成字母, 成了更一般化的一个题型, 把处理这个题型的窍门教给计算机, 计算机就会解这个题型的题. 人掌握了一类题目的规律, 把这规律总结提炼成有章可循的算法, 实现为程序, 计算机本领就更大, 会解这一类题了. 人掌握了方法, 推演计算论证繁了或者累了, 容易走神出错; 甚至时间长了, 所掌握的方法遗忘了都有可能. 但计算机一旦学会一套方法, 就不会忘记, 也很难出错, 做得飞快.

几千年来, 人们解几何题的招数, 层出不穷, 争奇斗艳. 概括起来, 不外这4类: 检验、搜索、归约和转换. 50多年来, 数学家和计算机科学家费尽心思, 循循善诱, 把个中奥秘向计算机传授. 使得计算机解几何题的能力日新月异, 大放光彩. 除了灵机一动加辅助线, 或千变万化的问题转换之外, 前三种方法计算机都学得十分出色了. 用机器帮助, 以至在某种程度上代替学者研究几何, 帮助以至代替老师指导学生学习几何, 已经从古老的梦想变为现实.

**3. 几何代数化的道路**

在几何定理机器证明中, 采用代数方法, 引进坐标, 将几何定理的叙述用代数方程的形式重新表达, 证明问题就转化成判定是否能从假设的代数方程推出结论的代数方程的问题. 这样把几何问题代数化, 自笛卡尔以来已是老生常谈, 并无实质困难. 然而代数化的过程, 坐标点的选取和方程引进的次序都可能影响到后续证明的难度, 甚至由于技术条件的限制, 影响到证明是否可能完成. 也就是说, 几何问题化成纯代数问题之后, 也并不见得一定容易, 更不能说就能实现机械化了. 这不仅是因为解决这些代数问题的计算量往往过大, 令人望而却步, 还因代表几何关系而出现的那些代数等式或不等式常常杂乱无章, 使人手足无措. 从这些杂乱无章的代数关系式中要找出一条途径, 以达到所要证的结论, 往往要用到高度的技巧. 换句话说, 即使你不怕计算, 会用计算机来算, 也不知道从何算起.

解几何题是思维的体操, 是十分有吸引力的智力活动之一. 图形的直观简明, 推理的曲折严谨, 思路的新颖巧妙, 常给人以美的享受. 许多青少年数学爱好者, 往往首先是对几何有了浓厚的兴趣. 用计算机证明几何问题, 如果仅限于用平凡而繁琐的数值计算代替巧妙而难于入手的综合推理, 则未免大煞风景. 通过计算机的大量计算判断命题为真, 确实是证明了定理. 这是有严谨理论基础的. 但这样的证明写出来只是一大堆令人眼花缭乱的算式、数字或符号, 既没有直观的几何意义, 又难于理解和检验, 这跟几何教科书上十行八行就说得明明白白的传统风格的证明大不相同. 如果计算机给出的这一堆难于理解和检验的数据也算是几何问题的解答, 这种解答只能叫做不可读的解答.

所幸的是, 计算机不仅能计算, 也能推理. 只要我们会教, 它也能学会传统风格的几何解题方法. 我们希望的是, 既要用计算机帮助人脑, 减轻人的高级脑力劳动, 还要在提高效率的同时, 寻

求传统几何的魅力.

**4. 寻求传统风格的几何证明**

有经验的老师讲新课, 总是从具体例子开始. 同样, 我们给计算机当老师, 教它用传统的风格解决几何问题, 也要从具体实例开始, 让它知道传统风格解几何题是怎么回事.

例1　如图1, 平行四边形$ABCD$中, $AE\perp BD$于$E$, $CF\perp BD$于$F$, 求证$AE=CF$.

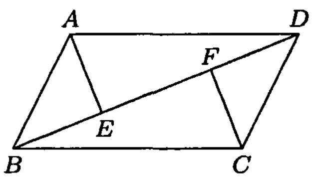


图 1

在初学几何证明的时候, 老师常常要求学生画结构图, 再将结构图整理成证明, 而且每一步的推理都要写出推理规则. 下面就给出证明例题的结构图以及整理后的证明过程.

① $ABCD$是$\varGamma$ $\Longrightarrow BC=DA$;

② 由$CF\perp BD$, $AE\perp BD$,

$\Longrightarrow \angle BFC=\angle DEA=90^\circ$;

③ $ABCD$是$\varGamma$

$\Longrightarrow BC/\!/DA \Longrightarrow \angle CBD=\angle ADB$.

综上$\Longrightarrow \triangle BCF\cong\triangle DAE$

$\Longrightarrow CF=AE$.

| | | |
|---|---|---|
| [0]: | $ABCD$是平行四边形 (已知) | |
| [1]: | $BC/\!/DA$ | (0和平行四边形的定义) |
| [2]: | $\angle CBD=\angle ADB$ | (0, 平行四边形的定义和平行线的性质) |
| [3]: | $CF\perp BD$ | (已知) |
| [4]: | $\angle BFC=90^\circ$ | (3和直角的定义) |
| [5]: | $AE\perp BD$ | (已知) |
| [6]: | $\angle DEA=90^\circ$ | (5和直角的定义) |
| [7]: | $\angle DEA=\angle BFC$ | (4, 6) |
| [8]: | $BC=DA$ | (0和平行四边形的定义) |
| [9]: | $\triangle BCF\cong\triangle DAE$ | (2, 7, 8及AAS) |
| [10]: | $CF=AE$ | (9和全等三角形的性质) |

让我们像小孩子拆开玩具那样, 把上述命题和证明分解成一堆"零件", 看看它们是如何组装起来的.

先看看命题部分. 它提供了有关问题的基本信息:

1. $ABCD$是平行四边形. 这为证明中的[1]、[2]和[8]提供了理论依据.

2. $CF\perp BD$, $AE\perp BD$. 这为证明中的[4]和[6]提供了理论依据.

3. 希望证明的结论: $AE=CF$. 这是证明中[10]的内容, 但不包括后面括号内的理由.

这表明题目所给的信息都出现在证明过程之中了. 这是有道理的, 证明中不用的信息, 肯定是多余的.

再看证明部分. 它由11行组成, 每行的前半段是一个判断, 或者说提供一条信息, 后半段, 即括号里的部分是这个判断的理由. 如果这个判断来自命题的条件, 则简单地说"已知". 否则, 就指出这条新信息是由前面已经得到的哪些信息推出来的, 以及能够进行这一步推理的依据—定理、定义等几何知识.

可见, 我们能写出上述证明, 如果不是死记硬背, 那么在头脑中就一定要保留并运用两类资源: 命题所包含的几何信息, 一般的几何知识. 如果说解几何题有时需要灵感, 那么这灵感也只能在所掌握的几何知识的基础上产生. 这就是所谓的熟能生巧.

**5. 自动推理的基本设想**

在上述分析的基础上, 我们来描述一下解答产生的过程, 以便为计算机提供榜样.

在看到题目之前, 已经掌握了有关的一般几何知识: 公理、定理、定义、公式, 通称推理规则. 这是预先就存在头脑里的一个知识库—推理规则库. 读了题目之后, 把题目提供的几何信息记在头脑里, 这就形成了一个临时的几何信息库. 不管你是不是意识到, 你头脑中一定有这两个库, 否则就很难解题. 如果你缺乏几何知识(没有推理规则库)或记不清题目(没有几何信息库)十之八九不会成功.

然后进行思考. 这就是将知识库里的推理规则应用于几何信息库里的信息. 推出了新信息, 就把新信息和它的来历(用了什么推理规则和哪些旧的信息都要记下来, 不然就成了一笔糊涂帐)加到信息库里. 并不是每条新信息都有用. 可是在题目还没完全解答出来的时候, 天晓得哪条信息有用, 哪条信息没有用呢, 还是统统记下来为妙. 这种得到什么要什么的战略叫做大英博物馆方法, 破盆子烂骨头进了博物馆说不定都是宝贝. 反复进行下去, 这个过程叫做前推式几何信息搜索过程.

如果你觉得脑子不够用, 记不住越来越多的信息, 不妨拿张草稿纸记一下. 推理规则太多了

记不住, 也可以拿本数学手册或几何课本作参考. 反正这又不是闭卷考试.

如果所有的推理规则都用了, 还得不到新的信息, 就到此为止, 别干下去了. 这表明几何信息库再也不能扩大了, 叫做达到了推理不动点. 这时, 如果几何信息库中包含了所要证的结论或待求的几何量, 则解题成功. 否则解题失败.

通常我们随时关注新信息是否包含了所要的结论. 结论一出来, 就不再去追求推理不动点. 解题成功, 就可从你记下来的信息当中提取有关的东西, 组织成一个有条有理的证明或解法. 解题失败, 并不意味着几何信息库就没用了. 它可作为进一步思考的基础. 进一步思考的方向有: 要不要多学点几何知识, 增加几条推理规则; 要不要添加辅助线; 要不要用同一法或反证法.

复杂的推理过程可以化为简单的机械化的操作, 但简单的操作重复多次就不再简单了. 要提高效率, 就又出现复杂的问题. 许多几何问题包含了大量的信息. 人在进行解题思考时能借助于直觉和经验, 抓住最关键的信息得到解答, 计算机却靠机械地搜索, 大鱼小鱼一网打尽, 工作量就非同小可了. 譬如一个三角形和它的三条高线以及垂心, 这是个很简单的几何图形, 用计算机搜索几何信息, 居然发现图中有105组成比例的线段.

计算机在搜索中得到的有用信息很多, 没用的信息就更多. 而推理规则和信息组匹配失败的情形却比比皆是. 不幸的是, 有用、无用的信息都要经过检查才能决定取舍, 成功、失败的匹配都要经过操作才能明白. 要去掉大量失败的操作而留下成功的匹配, 检查许多无用的信息而获取有用的结论, 如同沙里淘金.

这种一网打尽、涸泽而渔的搜索推理, 并不是什么新的发现, 而是一种古老的机械化推理设想. 在没有计算机的时代, 也只能想想而已. 一旦有了计算机, 科学家就希望将之付诸实践, 但困难的是难以将这个一般性的想法用有效的算法和程序实现.

用机械的方法解决千变万化的几何问题, 曾是历史上一些卓越的科学家的美好梦想. 现在, 这个梦想已经成为生活中的现实. 这个成功来之不易, 这是许多科学家多年努力的成果. 其中, 当代中国科学家的工作起了决定性的作用. 机器证明经过50多年的发展, 已经形成一个庞大的系统. 在这里就不多说了, 也不是一篇文章能够说清楚的. 文末列举了一些和平面几何证明相关且较为通俗的文献, 可供读者参考.

**6. 自动推理软件的不断成熟**

从1998年起, 《几何专家》、《数学实验室》等具备自动推理功能的数学软件相继问世, 引起了国内外各界特别是数学教育界的广泛关注. 在这些研究的基础上, 我国又自主研发了《智能教育平台—超级画板》, 这是一个集动态几何、符号运算、编程环境、自动推理等多项功能为一体的综合性平台, 具有"人性化, 智能化, 可视化, 动态化和程序化"等特点. 下面我们就以例1为例, 看看超级画板的自动解题功能.

第一步, 根据题意作好几何图形(图1), 由于超级画板的智能画笔功能强大, 所以画出该图形是相当容易的.

第二步, 在推理菜单中点击"自动推理"; 此时, 若仔细观察, 会发现屏幕底部的状态栏在飞快地变化, 表示推理正在进行.

第三步, 我们很快(大概4秒钟)就能在屏幕左边看到自动弹出的"推理库", 超级画板共推导出194条非平凡信息; 根据我们的需求, 点击"线段相等信息"前的"+"将之展开, 找到我们需要的"$CF = AE$"(图2).

第四步, 逐级单击结论前的加号, 即可看到推导出该结论的依据, 直到已知条件或者显然为止(图3).

第五步, 右键点击结论"$CF = AE$", 即可自动生成推理过程(图4).

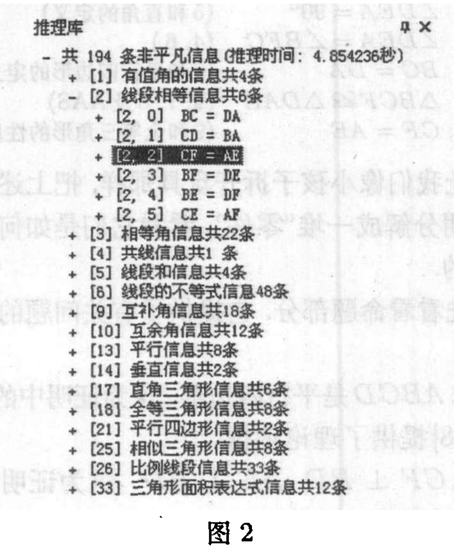


图 2

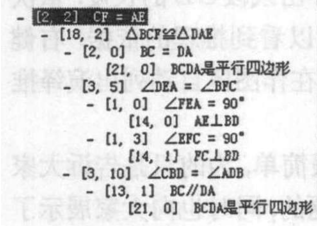


图 3

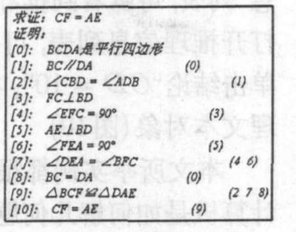


图 4

由于我们并没有告诉计算机需要求证的结论，所以计算机就把它能够推导出来的所有信息一股脑推导出来，供我们选用. 能在很短的时间内，推导出这么多有用的信息，这正是计算机的威力所在. 对比之后，我们会惊奇地发现，超级画板推理库中逐级展开的结构图(图3)以及自动生成的证明(图4)与前面所说的人工的传统证明几乎没有什么差别. 在图3中，我们很容易看出，要证明线段相等，就要先证明线段所在的两个三角形全等；而证三角形全等，可以采用AAS定理，这就要去找所需要的三个条件；这三个条件是并列关系，合起来作为三角形全等的理论依据. 而这三个条件的满足则来源于题目所给的信息. 看懂证明之后，你若懒得花时间书写，则可让计算机自动完成.

使用超级画板的自动推理功能还有几点需要说明. (1)当我们用鼠标选中某一关系式时，譬如“$\angle DEA=\angle BFC$”，则该关系式所牵涉到的对象变色，并作出相应的标注，这非常有助于理解和学习；(2)超级画板的自动推理是相当详尽的，最后的落脚点总是题目已知信息或最基本的一些几何知识，假如你在逐级展开的过程中，发现自己已经弄懂了题目，那么就可以右键点击结论，没有必要将所有的“+”都展开，而此时自动生成的证明也会随之简单很多. 这就好比通常所说的，高手解题比较简略，一些较明显的结论被一笔带过. (3)学习是一个循序渐进的过程，所以要避免证明中用到学生还没有学过的知识，可以根据学生的学习进度，选择证明过程中可以选用的推理规则，而这也是可以设置的.

另外，对于牵涉到长度、角度等几何量的题目，超级画板还允许人工增添“附加条件”，计算机会根据图形条件和添加的附加条件进行推理.

例2 如图5所示，在$\triangle ABC$中，$AB=5$，$BC=13$，$AD$是$BC$上的高，$AD=4$，求$CD$.

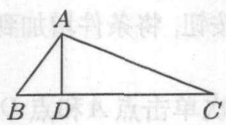


图 5

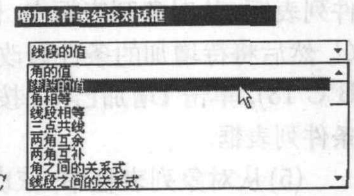


图 6

(1)作任意$\triangle ABC$(拖动到上图近似的形状，与问题中的数量关系保持接近)；自点$A$作$BC$边上的垂线段$AD$.

(2)单击菜单项“推理|添加附加条件或结论……”，结果弹出“增加条件或结论对话框”. 如图6所示，从“条件或结论”列表中，选择“线段的值”类型的条件.

(3)如图7所示，在右边对象列表中依次单击点$A$、点$B$，将其增加到条件对象列表框中；同时在条件编辑框中出现条件的类型和对象. 将待增加的条件修改为：(segmentvalue A B 5).


图 7

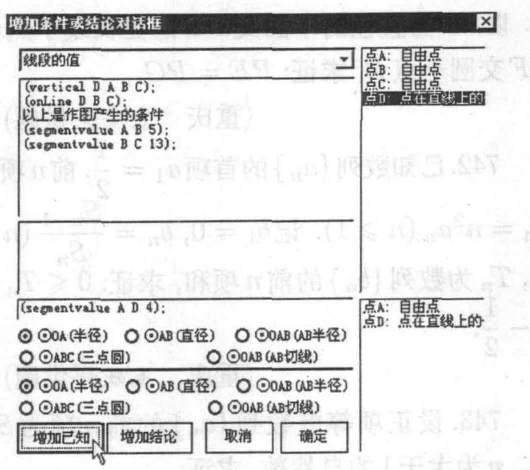


图 8

(4)单击【增加已知】按钮，将条件增加到条

件列表框. 从对象列表框中, 依次单击点$B$和点$C$, 然后将待增加的条件修改为: (segmentvalue B C 13), 单击【增加已知】按钮, 将条件增加到条件列表框.

(5) 从对象列表框中, 依次单击点$A$和点$D$, 如图 8 所示, 然后将待增加的条件修改为: (segmentvalue A D 4), 单击【增加已知】按钮, 将条件增加到条件列表框.

(6) 单击【确定】按钮退出后, 单击菜单命令"推理|自动推理", 计算机开始进行根据已知图形条件和增加的辅助条件进行推理. 推理结束后, 推理工作区自动被激活. 这时可以看到推理得到的结果. 如图9所示, 打开"有值线段的信息"列表, 可以看到推导出线段$CD$的长度. 依次打开推理信息列表, 可以看到推理的依据. 右健单击结论"$CD = 10$", 在作图区自动列出演绎推理文本对象(图10)

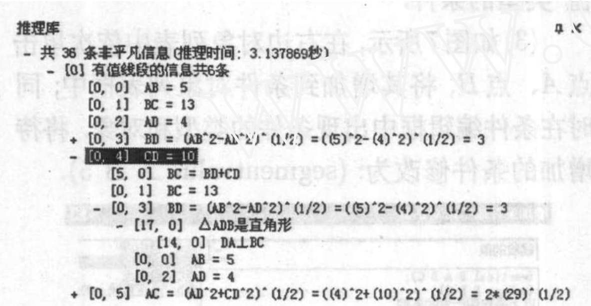


图 9

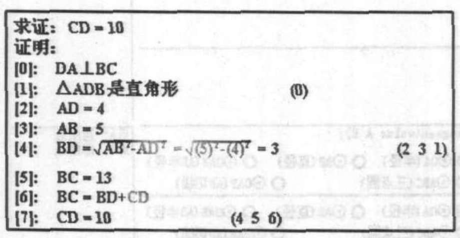


图 10

本文所举实例都很简单, 为的只是告诉大家计算机是如何解几何题的, 同时也向大家展示了超级画板自动推理的一个过程. 我们以后的文章将列举一些有难度的实例, 详尽介绍超级画板的自动推理功能. 有兴趣的读者也可参看文[7].

**参考文献**

[1] 张景中. 计算机怎样解几何题——谈谈自动推理. 清华大学出版社; 暨南大学出版社. 2000.

[2] 吴文俊主编. 王者之路——机器证明及其应用. 湖南科学技术出版社. 1999.

[3] 张景中. 平面几何新路解题研究. 四川教育出版社. 1994.

[4] 孙熙椿. 平面几何定理的机器证明. 广西教育出版社. 1999.

[5] 吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理初等几何部分. 科学出版社. 1984.

[6] Shang-Ching Chou, Xiao-shan Gao, Jing-zhong Zhang. Machine Proofs in Geometry: Automated Production of Readable Proofs for Geometry Theorems. World Scientific. 1994.

[7] 李传中、左传波. 超级画板范例教程. 科学出版社. 2004.

(上接第8-48页)

$F$. 以$AC$为直径的半圆交$BD$的延长线于点$G$, $GF$交圆于点$P$, 求证: $PE = PG$.

(重庆 袁安全供题)

742. 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1 = \frac{1}{2}$, 前$n$项和$S_n = n^2 a_n\,(n \geqslant 1)$. 记$b_1 = 0$, $b_n = \frac{S_{n-1}}{S_n}\,(n \geqslant 2)$, $T_n$为数列$\{b_n\}$的前$n$项和, 求证: $0 \leqslant T_n < n - \frac{1}{2}$.

(重庆 王跃辉供题)

743. 设正项等差数列$\{a_n\}$的前$n$项为$S_n$, $m$、$n$为大于1的自然数, 求证:

$$\sqrt[m]{a_1} + \sqrt[m]{a_2} + \cdots + \sqrt[m]{a_n} > \sqrt[m]{S_n}.$$

(安徽 盛宏礼供题)

744. 已知$\triangle ABC$中, $O$、$H$分别为外心、垂心, $R$为其外接圆半径, 试将$AB^2+BC^2+CA^2+OH^2$写成关于$R$的函数.

(法国试题 上海周 元解答)

745. 已知$a$、$b$、$c$都是正实数, 且满足$abc = 1$, 求证:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{1}{2}\left[\frac{a(b^2+c^2)}{b+c} + \frac{b(c^2+a^2)}{c+a} + \frac{c(a^2+b^2)}{a+b}\right] \geqslant \frac{ab+bc+ca}{2} \geqslant \frac{3}{2}.$$

当且仅当$a = b = c = 1$时取等号.

(河北 孙志坤供题)

(本栏目责任编辑 李大元 汪纯中)