与中学老师谈微积分(1) ——微积分历史回顾

张景中

(湖北省武汉市华中师范大学　教育部教育信息技术工程研究中心, 430079)

【编者按语】　150 多年来,人们普遍认为,不用极限概念就不能定义函数的导数,也就不能严谨地讲述微积分. 但是,普遍承认的事并不一定就是对的. 在数学家眼里,没有证明的命题总是可以怀疑的. 笛卡尔主张:怀疑一切. 这里,不是消极的怀疑,而是积极的思考分析:去粗存精,由表及里,对不对都要有个说法,有个根据. 用极限概念,可以严谨地定义函数的导数. 这并不能推出:不用极限概念,就不能严谨地定义函数的导数. 因此,本刊特别邀请著名数学家、中国科学院院士张景中教授给我们谈谈不用极限的微积分教学,请各位读者留意.

引言

微积分学的重要,众所周知. 世界上每年都有数千万人学习微积分. 我国高中数学新课程中,也增加了微积分初步的一些内容.

微积分的基本原理,很难说得清楚明白. 在数学史上,牛顿和莱布尼兹被誉为微积分的主要创建人. 他们对自己创建的微积分就说不明白. 当时和后来的许多杰出数学家,包括欧拉这样的伟大数学家,也说不明白. 数学家使用原理说不清的方法来解决问题,引来了激烈的冷嘲热讽. 人们称此为第二次数学危机.

数学家们前赴后继,一代接着一代地思考. 在大约 150 年后,终于补上了微积分的基本概念上的漏洞. 所用的方法,就是近百年来大学数学系微积分教程里要讲的极限定义方法,所谓 $\varepsilon\delta$ 语言的方法. 这个方法是法国的柯西和德国的维尔斯特拉斯提出来的.

其实,用极限来说明微积分的思想,莱布尼兹早已有了,但说不明白极限的概念. 概念说不明白,一系列的定理的证明只能含含糊糊. 直到出现了 $\varepsilon\delta$ 语言,把极限说清楚了,微积分也就说清楚了.

虽然说清楚了,但 $\varepsilon\delta$ 语言学起来太辛苦. 除了数学专业,大学里的理工科的高等数学课程里,都不要求掌握 $\varepsilon\delta$ 语言的推理方法,只求直观地大概了解微积分的原理. 也就是说,在微积分的严谨化完成后 100 多年的今天,尽管每年有上千万人学习微积分,但其中百分之九十都是知其然而不知其所以然,对微积分的原理只能做到模模糊糊地了解.

如何能够让学生轻松地弄明白微积分的原理,这是世界上数学教育领域的百年难题. 如今,难题有望解决. 解决难题的方案令人惊奇:不用极限概念,用一个初等的不等式来定义函数的导数,也能够严谨地建立微分学. 这个不等式,就是我国著名数学家林群院士提出的“一致性不等式”.

林先生提出用“一致性不等式”来定义导数,首先是为了直接地简捷推出微积分基本定理. 随后我们发现,这样定义导数使更多的问题能够迎刃而解. 这样一来,微积分中最基本的部分,就成了初等数学! 在一些数学大家的著作里,常常说,没有极限概念就无法定义导数. 现在发现,不用极限概念不但能定义导数,而且更利于展开推理. 如果当初牛顿发现了这个定义方法,第二次数学危机就没有了. 数学史就要改写. 如果柯西和维尔斯特拉斯发现了这个定义方法,高等数学教学的最大难点就被消除了. 当初,用极限来定义导数,深化了人们对微积分的认识. 现在发现,不用极限也能定义导数,人们对微积分的认识更加深化了.

1　从抛物线的切线谈起

如果把抛物线的切线,看成是和抛物线只有一个公共点的直线,只要你学过二次方程,又懂得一些解析几何,那么切线不难做出. 而我们通常是从简单的情形,看出一般的规律.

最简单的情形,抛物线的方程是 $y = x^2$,在抛物线上取一个点 $P(u, u^2)$,过点 P 作抛物线的切线,如何写出切线的方程?

如果知道了切线的斜率 k,切线方程应当有这

样的形式:$y - u^2 = k(x - u)$,把这个带有未知斜率 k 的方程和抛物线的方程 $y = x^2$ 联立,可以得到 x 的方程 $k(x - u) + u^2 = x^2$;化简后为 $x^2 - kx + (ku - u^2) = 0$. 解这个二次方程,可得抛物线与切线的公共点的 x 坐标. 但是因为公共点只有一个,所以这个方程有重根,判别式应当为 0,也就是 $k^2 - 4ku + 4u^2 = 0$,解得 $k = 2u$. 取 u 的一些具体数值,例如 $u = 1$,画出来看看,这样得到的果然像是这条抛物线的切线(图 1).

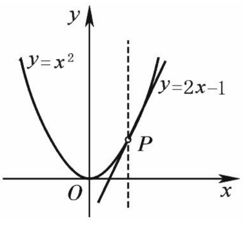

图　1

但是,图中的一条虚线表明,过点 P 而平行于 y 轴的直线,它和抛物线也只有一个公共点. 这条与抛物线只有一个公共点的直线,是看出来的,不是推出来的!这就发现,上面的推理有个漏洞!我们假定了与抛物线只有一个公共点的直线有斜率 k;可是,偏偏是这条平行于 y 轴的直线,它没有斜率,而与抛物线只有一个公共点!直观上,我们很难承认这条平行于 y 轴的直线是抛物线的切线!这就发现,上面的切线概念可能也有漏洞. 把抛物线的切线看成是与抛物线只有一个公共点的直线未必妥当.

如果不说清楚什么是抛物线的切线,当然不好解决抛物线的切线的作图问题. 如何定义抛物线的切线?更一般地,如何定义更多的曲线的切线?是我们研究切线作图方法时面临的基本难题.

遇到难题,不但要敢于“知难而进”,也要善于“知难而退”. 退是为了巩固阵地,更稳妥地前进. 退回来再想想圆的切线,它除了和圆只有一个公共点之外,还有什么可说的?数学家看一件东西,常常把它放在变动的过程之中观察,注意到它的前身后世和左邻右舍. 圆的切线动一动,一不小心会变成割线,它和圆的一个公共点就一分为二,变成两个交点!反过来,割线和圆的两个交点,如果慢慢接近,直到合二为一,割线也变成了切线!用这个眼光看,就看出来一个定义抛物线的切线的新的思路:过抛物线上一点 P 和另一点 Q 作割线,再让 Q 向 P 靠拢,当 Q 和 P 重合的时候,割线就成为切线.

别以为这个思路简单. 笛卡尔当年在研究抛物线的切线作图方法时,就没有想到这点. 又过了几十年,数学家想到了这一点,微分法就呼之欲出了!

我们来重复一下 300 多年前的数学家的工作,沿着割线变切线的思路找出抛物线的切线来. 像前面所说,在抛物线 $y = x^2$ 上取一定点 $P = (u, u^2)$,再取一个动点 $Q = (u + h, (u + h)^2)$,则割线 PQ 的斜率为 $\frac{(u + h)^2 - u^2}{(u + h) - h} = \frac{2uh + h^2}{h} = 2u + h$. 我们想象,当动点 Q 向定点 P 靠拢时,h 的绝对值越来越小,割线的斜率 $2u + h$ 越来越接近切线的斜率. 当 P 和 Q 重合时,也就是 h 变为 0 时,就得到了切线的斜率 $2u$,这和前面用二次方程的判别式得到的结果不谋而合,殊途同归.

这个方法不但比前面的方法简单,而且是个更一般的方法;不但可以用来求抛物线的切线的斜率,而且也能用来计算许多其他曲线的切线的斜率.

设曲线对应的函数的表达式是 $y = F(x)$. 要计算曲线上一点 $P = (u, F(u))$ 处的切线的斜率,要再取一个动点 $Q = (u + h, F(u + h))$,则割线 PQ 的斜率为 $\frac{F(u + h) - F(u)}{h}$,在这个表达式中设法把分母上的 h 约掉,再让 h 的绝对值变为 0,也就是让 P 和 Q 重合,所得到的表达式的值就是点 P 处的切线的斜率. 这个斜率,在数学上叫做函数 $F(x)$ 在 $x = u$ 处的导数,也叫微商. 这是微积分学的最重要的基本概念.

这样一来,也解决了有很多实际应用的求函数的最大值和最小值的问题. 这是因为,函数曲线在高峰点或低谷点的切线总是水平的(图 2),其斜率为 0;能写出切线斜率的表达式,也就能列出高峰点或低谷点的横坐标满足的方程了.

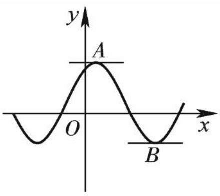

图　2

德国哲学家和数学家莱布尼兹,他用这种新思想深入地研究了曲线的切线和函数的最大最小值有关的问题.

用这样简捷的方法,一举解决了成千上万各种各样的曲线切线的作图问题. 不但如此,也解决了有很多实际应用的求函数的最大值和最小值的问题.

这样非同小可的发现,使当时的数学家兴高采烈. 但是,人们很快就发现,这种新方法的基础是不严谨的,在逻辑上有一个漏洞. 回过头去看看前面计算抛物线斜率时的推导:先列出等式 $\frac{(u + h)^2 - u^2}{(u + h) - h} = \frac{2uh + h^2}{h} = 2u + h$,再让 h 变为 0,就得到了切线的斜率 $2u$.

在这推导过程中,先要假定 h 不等于 0,否则就无法把它作为分母,更无法把它约掉而得到 $2u + h$;一旦得到了表达式 $2u + h$,马上过河拆桥,出尔反尔地让 $h = 0$ 来得到斜率 $2u$. 既然表达式 $2u + h$ 是在 h 不为 0 的条件下得到的,凭什么又让 h 等于 0?

微积分创始人之一的牛顿,当然不会看不出这个漏洞.他弥补漏洞的方法是:不让 h 一下子变成 0,而是让 h 变成一种"无穷小量".什么是无穷小量呢?按牛顿的说法,它是一个数在变成 0 之前的最后形态,它不是 0,但它的绝对值比任何正数都小.因为 h 不是 0,所以可以做分母,可以约掉;又因为 h 的绝对值比任何正数都小,它在表达式 $2u+h$ 中可以忽略不计,$2u+h$ 就可以当成 $2u$ 了.

但是,这种神秘的"无穷小量"并没有把当年的数学家们从尴尬的处境中解救出来.人们问,"无穷小量"是什么?它如果是数,数在变成 0 之前还是数,哪有什么"绝对值比任何正数都小"的最后形态?如果不是数,有何理由能够像数一样地运算?当时一位著名的大主教贝克莱写了一篇长文,对这种新的方法冷嘲热讽,说"无穷小量"的比值是"量的鬼魂";并且质问数学家"既然相信这些量的鬼魂,有什么理由不相信上帝呢?"

人们称此为第二次数学危机.但是,数学家们并没有因为逻辑上的困难和人们的非议而抛弃新的方法,而是积极地挖掘新方法带来的宝藏,在不稳固的地基上设计并着手建设辉煌的大厦.数学家从来不为数学危机担忧.数学在现实世界中表现出来的力量总能使数学家充满信心.他们看得见问题,看得见困难,但不会止步.路上暂时搬不动的大石头就留给后来者,绕个弯继续前进.

2 极限概念 严谨但是难懂

数学家们前赴后继,一代接着一代地思考.在大约 150 年后,终于补上了微积分的基本概念上的漏洞.为了名正言顺地从表达式 $\frac{(u+h)^2-u^2}{(u+h)-h}=\frac{2uh+h^2}{h}=2u+h$ 里面把碍眼的 h 去掉而得到 $2u$,数学家想出来一个"极限"的说法:既然不好把 h 一下子变成 0,就让 h 无限地接近 0 吧.当 h 无限地接近 0 时,$2u+h$ 就会无限地接近 $2u$.

于是,就把 $2u$ 叫做"$2u+h$ **在 h 趋向于 0 的过程中的极限**".

一般地,就说:在 h **趋向于0的过程中**,表达式 $\frac{F(u+h)-F(u)}{h}$ 的极限,就叫做函数 $F(x)$ 在 $x=u$ 处的导数.

极限概念的创立,打了一个成功的擦边球.用无限接近于0代替等于 0,既合理合法,又达到了同样的目的!

极限的思想,牛顿和莱布尼兹其实都有了.但概念上总是说不清楚.例如,什么叫做"无限接近"?什么叫做"h 趋向于 0 的过程"?这些都是生活中的语言,即所谓自然语言.使用自然语言难以进行严谨的数学推理.必须把自然语言翻译成严谨的数学语言.

经过 19 世纪几位出色的数学家的创造性地工作,严谨的极限概念的表述诞生了.下面的极限定义,是基于法国数学家柯西提出的思想,而由德国数学家维尔斯特拉斯制定的:

函数极限的定义 设函数 $F(x)$ 在 $x=u$ 附近有定义;如果存在一个数 a,使得对于任给的正数 $\varepsilon>0$,总有 $\delta>0$,使当 $0<|x-u|<\delta$ 时,总有 $|F(x)-a|<\varepsilon$,就说:当 x 趋于 u 时 $F(x)$ 以 a 为极限.

数列极限的定义 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是无穷数列.如果存在一个数 a,使得对于任给的正数 $\varepsilon>0$,总有 $N>0$,使当 $n\geq N$ 时,总有 $|a_n-a|<\varepsilon$,就说数列 $\{a_n\}$ 以 a 为极限.

如果读者不理解这样拗口的定义,大可以对它不予追究.因为这丝毫不影响对本书后面内容的阅读.只要知道,有一位出色的数学家,用这样拗口的定义,补上了当初的导数概念的漏洞就够了.

上面的定义,用了希腊文的小写字母 ε,所以通常称为极限概念的 ε 语言.以极限概念的 ε 语言为工具,严谨的微积分学建立起来了.从柯西时代到今天,150 年来,大学数学系里讲授微积分,用的都是柯西-维尔斯特拉斯的极限概念的 ε 语言.

但是,对于初学者,ε 语言太难理解了.美国的一套著名的《微积分》教材中告诉学生,如果弄不懂这样的定义,"就像背一首诗那样把它背下来!这样做,至少比把它说错来得强."

匈牙利数学家和数学教育家波利亚,在谈到工科学生的微积分教学时说:"他们没有受过弄懂 ε 证明的训练…教给他们的微积分规则就像是从天上掉下来的,硬塞给他们的教条…"

这就是说,不学极限概念的 ε 语言,就弄不懂微积分;学习极限概念的 ε 语言,确实又太难了.恩格斯说:在一切理论成就中,未必有什么像 17 世纪下半叶微积分的发明那样,被看作是人类精神的最高胜利了.难道说,对于即使有机会学习高等数学的人中的大多数,注定不能理解这个标志着"人类精神的最高胜利"的成果?有兴趣的读者可以登陆数学通讯的论坛共同讨论,也可发邮件给作者(zjz101@ yahoo.com.cn)

(收稿日期:2008-05-04)