与中学老师谈微积分(2) ——函数的差商

张景中
(湖北省武汉市华中师范大学 教育部教育信息技术工程研究中心,430079)

1 函数的差商

1.1 差分和差商的概念

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 为了研究 $f(x)$ 的变化规律,需要考虑它在 I 中两点 u 和 v 处的函数值的差 $f(v)-f(u)$,称 $f(v)-f(u)$ 为函数 $f(x)$ 在两点 u 和 v 的差分. 如果记 $h=v-u$,此差分可以写成 $f(u+h)-f(u)$ 的形式. 这时也称 $f(u+h)-f(u)$ 为函数 $f(x)$ 在点 u 处(或 $x=u$ 处) 步长为 h 的差分. h 叫做差分的步长,可正可负.

当步长非 0 时,差分和它的步长的比值叫做差商. 函数 $f(x)$ 在两点 u 和 v 处的差商就是 $\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$,或者说,函数 $f(x)$ 在点 u 处(或 $x=u$ 处) 步长为 h 的差商为 $\frac{f(u+h)-f(u)}{h}$. 许多资料中,常常把 h 叫做自变量 x 的增量,记做 Δx;同时把 $f(u+h)-f(u)$ 叫做函数 $f(x)$ 的增量,记做 Δf 或 Δy. 这时,差商就可以简单地记做 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 或 $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ 了.

1.2 差商的几何意义

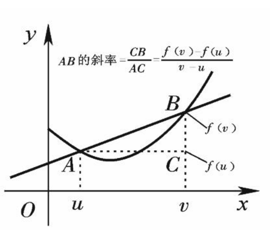

图 1

在图 1 中,A 和 B 是函数 $f(x)$ 的曲线上的两个点,$A=(u,f(u))$,$B=(v,f(v))$;显然 $\frac{f(v)-f(u)}{v-u}$ 是直线 AB 的斜率.

1.3 差商与函数的增减性

比照差商的概念和函数递增或递减的概念,显然有

定理 1.1 函数在区间 I 上递增(减) 的充要条件是它在 I 上差商为正(负).

例 1.1 通过计算差商确定函数 $f(x)=x^3-x$ 的递增和递减区间.

解 由于 $f(x)=x^3-x$ 是奇函数,只要考虑 $[0,+\infty)$ 上的情形.

设 $0\le u<v$,计算 $f(x)$ 的差商得

$$\frac{f(v)-f(u)}{v-u}=v^2+uv+u^2-1,$$

因为

$$3u^2-1<v^2+uv+u^2-1<3v^2-1,$$

所以当 $3u^2-1\ge 0$ 时,即在 $[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$ 上函数差商为正,递增;

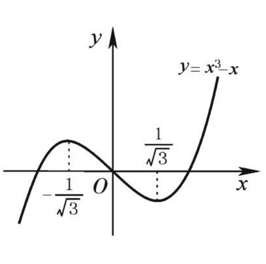

图 2

当 $3v^2-1\le 0$ 时,即在 $[0,\frac{1}{\sqrt{3}}]$ 上函数差商为负,递减.

根据奇函数性质推出: $f(x)$ 在 $(-\infty,$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}]$和$[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty)$上递增,在$[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}]$上递减(图 2).

1.4 差商有界的函数

若函数$f(x)$在区间 I 上有定义,并且有一个正数 M,使得对 I 上任意两点 $u<v$,总有不等式$|f(v)-f(u)|\le M|v-u|$成立,则称$f(x)$在区间 I 上差商有界.也说$f(x)$在区间 I 上满足李普西兹条件(Lipschitz 条件).

差商有界函数有一些"好"性质.

定理 1.2 (差商有界函数的有界性) 若函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上差商有界,则$f(x)$在区间$[a,b]$上有界.

证明 函数$f(x)$在区间$[a,b]$上差商有界,则有一个正数 M,使得对$[a,b]$上任意两点 $u<v$,总有不等式

$$|f(v)-f(u)|\le M|v-u|$$

成立.于是对任意 $x\in[a,b]$总有$|f(x)|=|f(a)+f(x)-f(a)|\le|f(a)|+|f(x)-f(a)|\le|f(a)|+M|x-a|\le|f(a)|+M|b-a|$,这证明了$f(x)$在区间$[a,b]$上有界.

***定理 1.3** (差商有界函数的局部保号性) 设函数$f(x)$在区间 I 上差商有界,若对 $u\in I$ 有$f(u)>0$,则有一个包含 u 的开区间$\Delta_u=(u-\delta,u+\delta)$,使对一切 $x\in\Delta_u\cap I$,都有$f(x)>0$.

证明 由$f(x)$在区间 I 上差商有界,有正数 M 使得对于任意 $x\in I$ 有$|f(x)-f(u)|\le M|x-u|$,从而$f(x)-f(u)\ge-M|x-u|$;取$\delta=\frac{f(u)}{2M}>0$,则当 $x\in\Delta_u\cap I$时有$|x-u|<\delta$,于是

$$f(x)\ge f(u)-M|x-u|>f(u)-M\delta=\frac{f(u)}{2}>0,$$ 证毕.

***定理 1.4** (差商有界函数值域稠密) 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上差商有界,两点 $p<q$在$f(a)$和 $f(b)$之间.则必有 $c\in[a,b]$,使得$f(x)\in(p,q)$.

证明 取 $m=\frac{p+q}{2}$.若有 $c\in[a,b]$,使得 $f(c)=m$,则结论为真.

若不然,将区间$[a,b]$作 n 等分,则必有两个相邻的分点 u 和 v,使得$f(u)<m<f(v)$.由于$f(x)$在区间$[a,b]$上差商有界,有 M 使

$$0<m-f(u)<|f(u)-f(v)|$$
$$\le M|u-v|=\frac{M(b-a)}{n}$$

当 $n>\frac{M(b-a)}{m-p}$时,就得到 $0<m-f(u)<m-p$,从而 $p<f(u)<m<q$,证毕.

如果我们引进下面一条关于实数系统的公理,便可以证明差商有界函数的值域具有连续性.

公理 1.1 有上界的数集必有最小上界.

最小上界也叫做上确界.

公理 1.1 在有理数系中是不成立的.例如,考虑所有平方小于 2 的正有理数组成的集合,它有上界,但在有理数中没有最小上界.如果在实数系统中考虑,$\sqrt{2}$就是这个数集的最小上界.

***定理 1.5** (差商有界函数值域连续——介值定理) 设函数$f(x)$在区间$[a,b]$上差商有界,$f(a)$和 $f(b)$反号,则必有 $c\in[a,b]$,使得 $f(c)=0$.

证明 考虑数集 $S=\{x|x\in[a,b],f(x)f(a)>0\}$,也就是使$f(x)$和$f(a)$同号的那些 x 的集合.显然 b 不属于 S,b 是 S 的上界,从而 S 有最小上界.设 S 的最小上界为 c.这时若$f(x)$和$f(a)$同号,由差商有界函数的局部保号性,有 $\delta>0$ 使得 $f(c+\delta)$也和$f(a)$同号,这与 c 是 S 的上界矛盾;若 $f(c)$和$f(a)$反号,同样由差商有界函数的局部保

号性,有 $\delta>0$ 使得 $f(x)$ 在 $[c-\delta, c]$ 上和 $f(a)$ 反号,于是 $c-\delta$ 也是 S 的上界,这与 c 是 S 的最小上界矛盾;剩下的一种可能就是 $f(c)=0$,证毕.

推论 1.1 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上差商有界,v 在 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间,则必有 $c\in[a,b]$,使得 $f(c)=v$.

证明很简单,只要对函数 $g(x)=f(x)-v$ 应用定理 1.5 即可.

例 1.2 求证函数 $y=x^2$ 在区间 $[a,b]$ 上差商有界.

证 对 $[a,b]$ 上任意两点 $u<v$,总有

$$|f(v)-f(u)|=|v^2-u^2|$$

$$=|v+u||v-u|\le 2(|a|+|b|)|v-u|,$$

取 $M=2(|a|+|b|)$,即知函数 $y=x^2$ 在 $[a,b]$ 上差商有界.

例 1.3 求证函数 $y=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,1]$ 上不满足李普西兹条件.

证 用反证法.若此函数在区间 $[0,1]$ 上满足李普西兹条件,则有正数 M,使得对 $[0,1]$ 上任意两点 $u<v$,总有不等式 $|\sqrt{v}-\sqrt{u}|\le M|v-u|$ 成立,也就是有 $1\le M|\sqrt{v}+\sqrt{u}|$ 成立,可见 $2M\ge 1$.取 $u=0$,$v=\frac{1}{4M^2}$ 代入,推出 $2\le 1$,矛盾.这证明反证法假设不成立,即函数 $y=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,1]$ 上不是差商有界的(图 3).

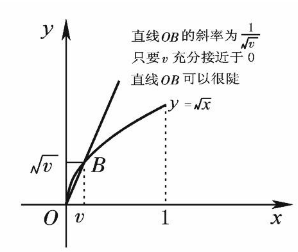

图 3

几何上看,差商有界的函数,其曲线上任意两点所确定的直线的斜率的绝对值有界.也就是不能太陡.

多项式函数、三角函数、指数函数和对数函数在有定义的闭区间上总是差商有界的.两个差商有界函数的和、积、以及复合函数也是差商有界的.

如果函数 $F(x)$ 在区间 $[a,c]$ 上和区间 $[c,b]$ 上都是差商有界的,则它在区间 $[a,b]$ 上也是差商有界的.反过来,若函数 $F(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上差商有界,则它在 $[a,b]$ 的任意子区间上也是差商有界的.这种性质,叫做差商有界的区间可分性.或者说"差商有界"是一种区间可分的性质.

从例 1.3 看到,有些常见的函数例如 $y=\sqrt{x}$,不是差商有界的.为了考虑更广泛的函数类,我们引进"广义差商有界"的概念:

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义,并且有一个正数 M 和正整数 r,使得对 I 上任意两点 $u<v$,总有不等式 $|f(v)-f(u)|^r\le M|v-u|$ 成立,则称 $f(x)$ 在区间 I 上广义差商有界.也说 $f(x)$ 在区间 I 上满足李普西兹 α-条件(Lipschitz α-条件).

例 1.4 求证:函数 $y=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,1]$ 上广义差商有界.

证明 对区间 $[0,1]$ 上任意两点 $u<v$,有

$$|f(v)-f(u)|=|\sqrt{v}-\sqrt{u}|$$

$$=\frac{|(\sqrt{v}-\sqrt{u})(\sqrt{v}+\sqrt{u})|}{\sqrt{v}+\sqrt{u}}\le\frac{|v-u|}{\sqrt{v}-\sqrt{u}},$$

两端同用 $|f(v)-f(u)|=|\sqrt{v}-\sqrt{u}|$ 来乘,得到:

$$|f(v)-f(u)|^2=|\sqrt{v}-\sqrt{u}|^2\le|v-u|,$$

这证明了函数 $y=\sqrt{x}$ 在区间 $[0,1]$ 上广义差商有界.

容易证明,广义差商有界也是区间可分性质.

(收稿日期:2008-05-23)