# 与中学老师谈微积分(3)
## ——从 3 个经典例子看微积分的基本问题

张 景 中
(湖北省武汉市华中师范大学 教育信息技术工程研究中心,430079)

### 2 从 3 个经典例子看微积分的基本问题

#### 2.1 平均速度和瞬时速度

**例 2.1** 用 $S = S(t)$ 表示直线上运动物体在时刻 $t$ 所走过的路程,$V = V(t)$ 表示它在时刻 $t$ 的瞬时速度,则它在时间区间 $[u, v]$ 上的平均速度的大小,应当在 $[u, v]$ 上的某两个时刻的瞬时速度之间.

也就是说,有 $[u, v]$ 上的 $p$ 和 $q$,使得下面的不等式成立:

$$V(p) \leq \frac{S(u) - S(v)}{u - v} \leq V(q) \qquad (2.1)$$

上式可用语言表达为"函数 $S(t)$ 的差商是 $V(t)$ 的中间值".

注意,我们现在不知道瞬时速度的数学定义.但从物理意义上相信瞬时速度是客观存在,并且它和平均速度应当有关系(2.1).

#### 2.2 割线的斜率和切线的斜率

**例 2.2** 记函数 $y = F(x)$ 的曲线上在点 $x$ 处的切线的斜率为 $k(x)$.则过两点 $A = (u, F(u))$ 和 $B = (v, f(v))$ 的割线的斜率,应当在 $[u, v]$ 上的某两个变量值对应的点处切线的斜率之间(图 4).

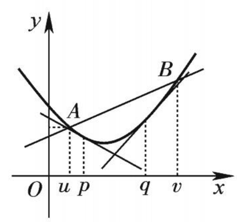


图 4

也就是说,有 $[u, v]$ 上的 $p$ 和 $q$,使得下面的不等式成立:

$$k(p) \leq \frac{F(u) - F(v)}{u - v} \leq k(q) \qquad (2.2)$$

上式可用语言表达为"函数 $F(x)$ 的差商是 $k(x)$ 的中间值".

注意,我们现在不知道切线斜率的数学定义.但从几何直观上看,光滑曲线应当有切线,并且切线斜率和割线斜率之间应当有关系.

#### 2.3 曲边梯形的面积

**例 2.3** 考虑 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ 的曲线和 $x$ 轴之间的面积.若记 $[a, x]$ 上曲边梯形面积为 $F(x)$(如图 5),则 $[u, v]$ 上这块面积为 $F(v) - F(u)$.如果把这块面积去高补低折合成长为 $v - u$ 的矩形,则矩形的高应当在 $[u, v]$ 上的某两个变量值对应的 $f(x)$ 的值之间(图 5).

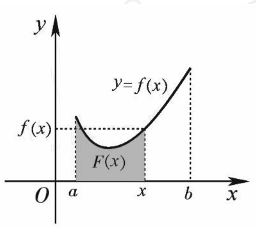


图 5

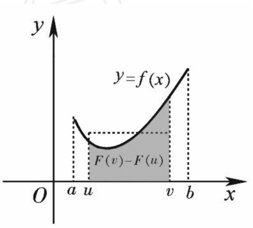


图 6

也就是说,有 $[u, v]$ 上的 $p$ 和 $q$,使得下面的不等式成立:

$$f(p) \leq \frac{F(u) - F(v)}{u - v} \leq f(q) \qquad (2.3)$$

上式可用语言表达为"函数 $F(x)$ 的差商是 $f(x)$ 的中间值".

注意,我们现在不知道曲边梯形面积的数学定义.但从几何直观上看,这面积应当存在,并且折合成长为 $v - u$ 的矩形后,矩形的高应当在 $[u, v]$ 上这段曲线的某两点高度之间(图 6).

上面 3 个例子中,都涉及两个函数,其中一个函数的差商是另一个函数的中间值.

从这些例子中,提炼出一个问题,这是微积分的基本问题:

**若 $f(x)$ 的差商是 $g(x)$ 的中间值,知道了一个函数,如何求另一个?**

从 3 个例子看,这个问题的重要性不言而喻.这个问题解决了,求作曲线切线的问题,求瞬时速度问题,求曲边梯形面积问题就都解决了."这些问题曾使许多才智超群之士百思不解"(莱布尼兹语).

有兴趣的读者可以登陆数学通讯的论坛共同讨论,也可发邮件给作者(zjz101@yahoo.com.cn).

(收稿日期:2008-06-10)